

twist positive knot の braid index と bridge index

広島大学 大学院先進理工系科学研究科 数学プログラム
姫野圭佑 (Keisuke HIMENO) *

概要

結び目には braid index と bridge index と呼ばれる幾何的な不変量が存在する。どちらも一般には決定が難しいが、定義より bridge index は braid index 以下という関係が従う。一般にはこれらは一致しないが、twist positive knot と呼ばれる結び目のクラスではこれらが一致することを示したので、これを紹介する。証明には結び目フレアホモロジー理論を用いる。

1 導入

1.1 結び目理論

結び目とは、円周 S^1 の 3 次元球面 S^3 への滑らかな埋め込みの像のことである (図 1)。そして、 S^3 内の二つの結び目 K_1 と K_2 が同値であるとは、向きを保つ同相写像 $h: S^3 \rightarrow S^3$ が存在して、 $h(K_1) = K_2$ となるときをいう。以降、結び目はこの同値類を指すことにするが、記号は簡単のため K などのまま用いる。

二つの結び目が異なる (同値でない) ことを示す道具として結び目不変量がある。これは同値な結び目に対しては、(適切な同値関係のもと) 同値な数学的対称を対応させる関係である。例えば、結び目 K に対し、(正規化された) Alexander 多項式 $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を対応させることができる。図

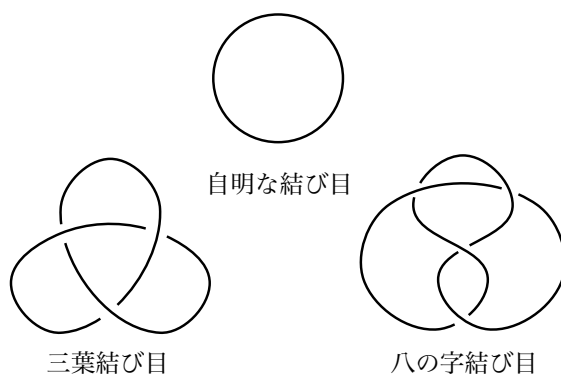


図 1 結び目の例.

* himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

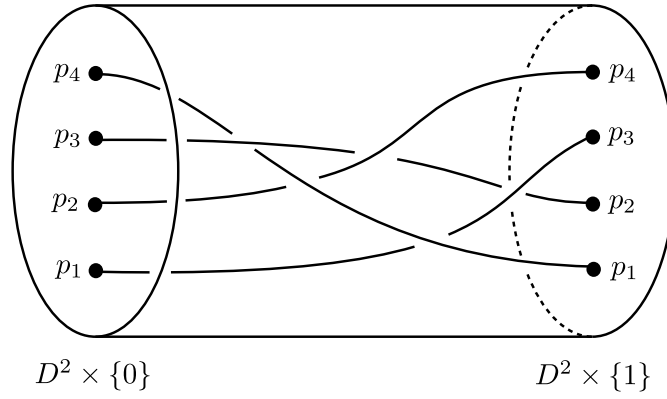


図2 n -braid の例 ($n = 4$).

1 に示された三つの結び目の Alexander 多項式は,

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{自明な結び目}}(t) &= 1 \\ \Delta_{\text{三葉結び目}}(t) &= t - 1 + t^{-1} \\ \Delta_{\text{八の字結び目}}(t) &= t - 3 + t^{-1}\end{aligned}$$

となり, これら三つの結び目は互いに異なることがわかる.

一方で, より素直な結び目不変量も存在する. 例えば, 結び目を平面に適切に描いたときに現れる交差の数の**最小個数**は結び目不変量である. これは交差数と呼ばれる. 自明な結び目に対しては 0, 三葉結び目に対しては 3, 八の字結び目に対しては 4 であることが知られている. このような結び目不変量は結び目の幾何的性質をよく反映していると考えことができ, 結び目の複雑さの指標の一つになりやすい. 本レポートのタイトルにある braid index と bridge index もこのタイプの結び目不変量である.

1.2 braid index

まず, braid を定義する [Art25]. n を 2 以上の自然数とする. 2 次元円盤 D^2 に n 点 p_1, p_2, \dots, p_n を一列に等間隔で配置しておく. 円柱 $D^2 \times [0, 1]$ とそこに埋め込まれた n 本の紐 $S := \bigsqcup_{i=1}^n I_i$ ($I_i := [0, 1]$) の組 $(D^2 \times [0, 1], S)$ が n -**braid** であるとは,

- $\partial S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \times \{0, 1\}$,
- 各 $t \in [0, 1]$ に対し, $S \cap (D^2 \times \{t\})$ は n 点集合,

をみたすときをいう (図 2). 二つの n -braid が $D^2 \times [0, 1]$ の境界を止めたアイソトピーで移り合うとき, それらは同じものとみなす. 二つの n -braid α, β に対し, α の $D^2 \times \{1\}$ と β の $D^2 \times \{0\}$ を同一視 (して円柱を $[0, 1]$ 方向に半分に縮小) することで積 $\alpha\beta$ が定義できる. $B_n := \{n\text{-braid}\}$ に上記の積で演算を入れたものは群になり, **braid 群**と呼ばれる. 図に示される braid σ_i は B_n の standard generator, あるいは Artin generator と呼ばれる.

braid から結び目 (あるいは絡み目と呼ばれる複数の円周が埋め込まれたもの) を作ることができ

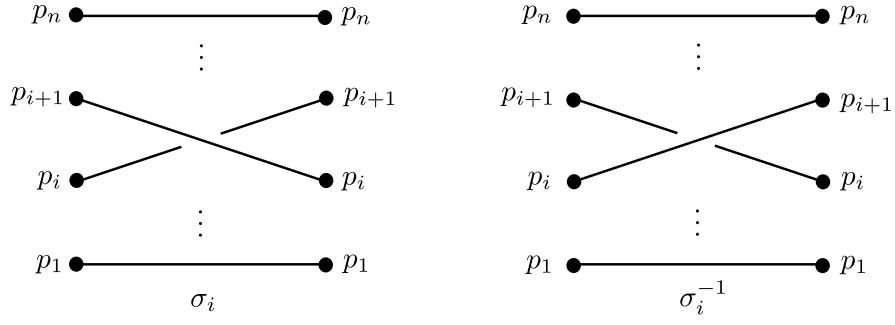


図3 B_n の standard generator. 図2 は $\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ である.

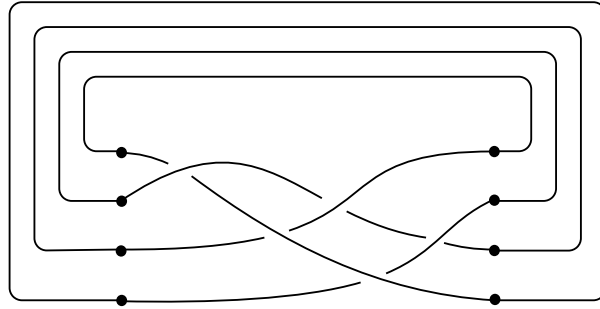


図4 図2 の 4-braid $\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ の閉包.

る. $\beta = (D^2 \times [0, 1], S)$ を n -braid とする. n 点 p_1, p_2, \dots, p_n が一列に等間隔で配置された 2 次元円盤 D^2 のコピー D' を用意する. 円柱 $D' \times [0, 1]$ を $D^2 \times [0, 1]$ に, $D' \times \{i\}$ と $D^2 \times \{i\}$ ($i = 0, 1$) を n 点 p_1, \dots, p_n が合うように貼り合わせる. このソリッドトーラス $D^2 \times [0, 1] \cup D' \times [0, 1]$ は S^3 内に標準的に埋め込まれているとみなすと, $S \cup (\{p_1, \dots, p_n\} \times [0, 1])$ は結び目または絡み目になる. つまり, braid の両端点を自明に繋いだことのできるものである. このような結び目を $\hat{\beta}$ と書き, β の閉包と呼ぶ. 図4 参照.

Alexander の定理 [Ale23] により, 任意の結び目はある braid の閉包として表すことができる. これにより, braid index が定義できる.

定義 1. 結び目 K に対し, **braid index** $\text{braid}(K)$ を

$$\text{braid}(K) := \min\{n \mid n\text{-braid } \beta \text{ s.t. } \hat{\beta} = K\}$$

で定める.

結び目 K を braid の閉包で表すために必要な紐の最小本数が braid index である. 例えば, $\text{braid}(K) = 1 \iff K$ は自明な結び目 であり, $\text{braid}(\text{三葉結び目}) = 2$, $\text{braid}(\text{八の目結び目}) = 3$ である. 実際, 三葉結び目は 2-braid σ_1^3 の閉包, 八の字結び目は 3-braid $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ の閉包として表せる.

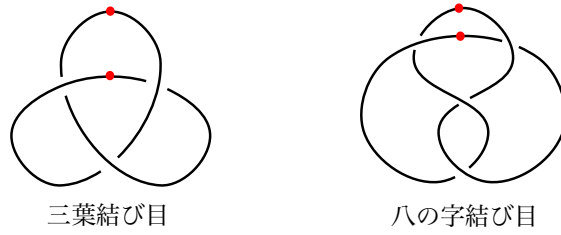


図5 赤い点は高さ関数の極大点.

1.3 bridge index

bridge index (bridge number と呼ばれる) は [Sch54] で Schubert により導入された結び目不変量である.

定義 2. K を 結び目とする. S^3 から無限遠点を除いて K は \mathbb{R}^3 に入っているとみなす. z 座標による高さ関数 $K \rightarrow \mathbb{R}$ が n 個の極大点を持つように K を \mathbb{R}^3 のアイソトピーで変形できるとき, K は n -bridge position を持つという. そして **bridge index** $\text{bridge}(K)$ を

$$\text{bridge}(K) := \min\{n \mid K \text{ は } n\text{-bridge position を持つ}\}$$

で定める.

braid index と同様, $\text{bridge}(K) = 1 \iff K$ は自明な結び目 が知られている. さらに図 5 より, $\text{bridge}(\text{三葉結び目}) = \text{bridge}(\text{八の字結び目}) = 2$ である.

2 主結果について

主結果を述べる. この内容は [Him25] に基づく.

2.1 主結果

braid index と bridge index の間には不等式

$$\text{bridge}(K) \leq \text{braid}(K)$$

が成立する. 図 6 参照. ただし, 一般に等号は成立しない. 例えば, $\text{bridge}(\text{八の字結び目}) = 2$ だが, $\text{braid}(\text{八の字結び目}) = 3$ であった.

では, いつ等号が成立するのかという問いが生まれる. [KM25] では次のように予想されている.

予想 1. K が braid positive knot (定義 3 参照) または L -space knot ([OS05] 参照) であるとき, $\text{bridge}(K) = \text{braid}(K)$ が成立する.

本研究はこの予想の解決を目指したものである. タイトルの twsit positive knot を定義する.

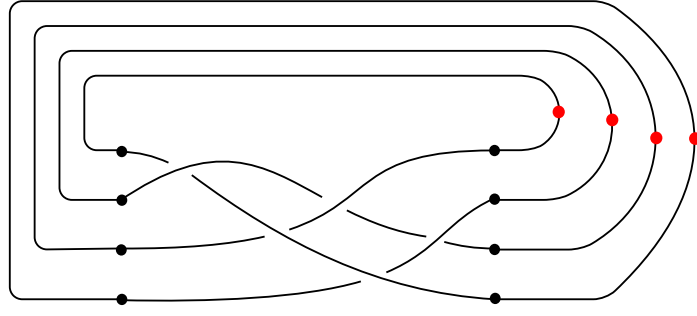


図6 ある 4-braid の閉包の 4-bridge position. z 軸を横向きにとっており, 赤点が高さ関数の極大点.

定義 3. 指数が正の standard generator の積で表せる braid を positive braid と呼ぶ. positive braid の閉包として表せる結び目を braid positive knot と呼ぶ. braid positive knot の中でも n -braid $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n\alpha$ (α は positive braid) の閉包で表せる結び目を *twist positive knot* という.

twist positive knot は少なくとも一回フルツイストを含む braid positive knot である. つまり, braid positive knot のクラスの部分クラスである.

次が主結果である.

定理 1. K を twist positive knot とする. このとき, $\text{bridge}(K) = \text{braid}(K)$ が成立する.

K が n -braid $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n\alpha$ (α は positive braid) の閉包で表せるとする. つまり, フルツイストを含む positive n -braid の閉包であるとする. このとき, [FW87, Mor86] により, $\text{braid}(K) = n$ であることが知られている. したがって, 上の主結果より, $\text{bridge}(K) = n$ も分かる.

3 主結果証明の概要

主結果の証明には knot Floer homology 理論を用いる [OS04]. 詳細は割愛するが, 結び目 K があると, graded, filtered な鎖複体 $\text{CFK}^\infty(K)$ が構成できる. ここから非負整数値結び目不変量 $\text{Ord}(K)$ が取り出せる. 次の bridge index との関係がある.

定理 2 ([JMZ20]).

$$\text{Ord}(K) + 1 \leq \text{bridge}(K).$$

つまり, bridge index を下から評価できる.

一方, $\text{CFK}^\infty(K)$ から Upsilon 不変量と呼ばれる関数型結び目不変量 $\Upsilon_K: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ が得られる [OSS17].

[FK17] により, twist positive knot の Upsilon 不変量は braid index n に依存したある特徴を持つ必要がある. これにより, twist positive knot の $\text{CFK}^\infty(K)$ には制限がかかり, $\text{Ord}(K) = n - 1$ を示すことができた.

参考文献

- [Ale23] James Waddell Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, Proceedings of the National Academy of Sciences **9** (1923), no. 3, 93–95.
- [Art25] Emil Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 47–72.
- [FK17] Peter Feller and David Krcatovich, *On cobordisms between knots, braid index, and the epsilon-invariant*, Mathematische Annalen **369** (2017), no. 1–2, 301–329.
- [FW87] John Franks and Robert Williams, *Braids and the jones polynomial*, Transactions of the American Mathematical Society **303** (1987), no. 1, 97–108.
- [Him25] Keisuke Himeno, *The bridge index and the braid index for twist positive knots*, preprint, arXiv:2507.23252.
- [JMZ20] András Juhász, Maggie Miller, and Ian Zemke, *Knot cobordisms, bridge index, and torsion in floer homology*, Journal of Topology **13** (2020), no. 4, 1701–1724.
- [KM25] Siddhi Krishna and Hugh Morton, *Twist positivity, L-space knots, and concordance*, Selecta Mathematica (N.S.) **31** (2025), no. 1, Paper No. 11, 27 pp.
- [Mor86] Hugh Morton, *Seifert circles and knot polynomials*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **99** (1986), no. 1, 107–109.
- [OS04] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, Advances in Mathematics **186** (2004), no. 1, 58–116.
- [OS05] ———, *On knot floer homology and lens space surgeries*, Topology **44** (2005), no. 6, 1281–1300.
- [OSS17] Peter Ozsváth, András Stipsicz, and Zoltán Szabó, *Concordance homomorphisms from knot floer homology*, Advances in Mathematics **315** (2017), 366–426.
- [Sch54] Horst Schubert, *Über eine numerische knoteninvariante*, Mathematische Zeitschrift **61** (1954), 245–288.